Tafeln von unbestimmten Integralen der Besselfunktionen

Projektleiter:
Prof. Dr. rer. nat. Werner Rosenheinrich
FB Grundlagenwissenschaften

Laufzeit:
seit 2003 fortlaufend

Kontakt:
✉ werner.rosenheinrich@fh-jena.de
☎ (03641) 205 535

W. Rosenheinrich

Homepage:
www.fh-jena.de/~rsh/Forschung/Stoer/besint.pdf

Neben den klassischen Anwendungen der Bessel-Funktionen - Beschreibung von Sachverhalten in Zylinderkoordinaten, speziell im Falle der Rotationssymmetrie - haben diese inzwischen eine Vielzahl weiterer Einsatzmöglichkeiten gefunden. Dabei werden oftmals ihre Integrale benötigt, auch in Kombination mit anderen Funktionen. Die gängigen Handbücher enthalten hierzu nur eine vergleichsweise geringe Anzahl von Formeln. Diese sind dazu oftmals unpraktikabel. Es handelt sich um komplizierte und langsam konvergierende Reihen oder sehr allgemeine Formeln, die bei der Anwendung aufwendig spezifiziert werden müssen. Bisweilen ergeben sie Probleme bei der numerischen Auswertung. Das Computeralgebrasystem MAPLE ist hier auch nur begrenzt eine Hilfe.

Ziel der Arbeit ist es, übersichtliche und einfache Integraltafeln zu erstellen und dem Praktiker mit diesen Tafeln unmittelbar verwertbare Formeln in die Hand zu geben. Die Ergebnisse werden nach Möglichkeit mit verfügbaren und gängigen Funktionen gebildet. Dies sind in erster Linie wiederum Bessel-Funktionen, daneben kommen Struve-Funktionen oder Lommelsche Funktionen zum Einsatz. All diese stehen auf Computeralgebrasystemen zur Verfügung oder es existieren in der Literatur leicht implementierbare Algorithmen zu ihrer Berechnung. Wo eine solche Darstellung der gesuchten Integrale nicht möglich, ist werden Basisintegrale definiert und diskutiert. Zu ihrer Berechnung sind Potenzreihen und asymptotische Reihen angegeben, weiterhin Entwicklungen nach Chebyshev-Polynomen oder andere numerisch günstige Darstellungen. Danach können Integrale einer jeweiligen Klasse auf diese zurückgeführt werden. Besonderer Wert wird auf Genauigkeitsaussagen gelegt. So ist bei alternierenden Potenzreihen der Bereich der praktischen Anwendbarkeit angegeben und bei asymptotischen Reihen die Annäherung in Formeln und Grafiken beschrieben. Die Ergebnisse erlauben in der Regel eine Ermittlung des Resultats mit einer Genauigkeit von zehn bis zwanzig Dezimalziffern. Bisher wurden die Besselfunktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$ und die modifizierten Besselfunktionen $I_0(x)$ und $I_1(x)$ als die am meisten gebräuchlichen Funktionen behandelt. Seit kurzem werden auch die Weber- oder Neumann-Funktionen $Y_0(x)$ und $Y_1(x)$ sowie die Hankel-Funktionen $H^{(m)}_n$ mit m,n = 1,2 betrachtet. Bei den Integranden handelt es sich um das Produkt von Besselfunktionen mit elementaren Funktionen (ganz- und halbzahlige positive wie negative Potenzen von x, Exponential- und Logarithmusfunktion sowie Sinus- und Kosinusfunktion), Quadrate von Besselfunktionen oder ihre Produkte (mit gleichen oder verschiedenen Argumenten), Produkte von drei Besselfunktionen u. a.. Dabei sind zumeist noch verschiedene Potenzen von x enthalten. Zu vielen Integralen, die den Faktor x^n im Integranden besitzen, sind Rekursionsformeln angegeben. Diese erlauben es, bei Bedarf auf Basis der explizit angegebenen ersten Integrale – z. B. für n zwischen 0 und 10 – weitere auf einfachem Wege zu berechnen. Vielfach sind damit auch die Fälle n < 0 zugänglich. Die Integraltafeln sind im Internet auf den Seiten der EAH Jena veröffentlicht.

Werner Rosenheinrich
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES JENA
Jena, Germany

12.05.2013
First variant: 24.09.2003

TABLES OF SOME INDEFINITE INTEGRALS OF BESSEL FUNCTIONS

Integrals of the type

$$\int x J_0^2(x)\,dx \quad \text{or} \quad \int x J_0(ax) J_0(bx)\,dx$$

are well-known.

Most of the following integrals are not found in the widely used tables of GRADSTEIN/RYSHIK, BATEMAN/ERDÉLYI, ABRAMOWITZ/ STEGUN, PRUDNIKOV/BRYCHKOV/MARICHEV or JAHNKE/EMDE/LÖSCH. The goal of this table was to express the integrals by Bessel and Struve functions. Indeed, there occured some exceptions. Generally, integrals of the type $\int x^\mu J_\nu(x)\,dx$ may be written with Lommel functions, see [8], 10 -74.
In some cases reccurence relations define more integrals in a simple way.

Partially the integrals may be found by MAPLE as well. In some cases MAPLE gives results with hypergeometric functions, see also [2], 9.6. .
Some known integrals are included for completeness.

Here $Z_\nu(x)$ denotes some Bessel function or modified Bessel function of the first kind. Partially the functions $Y_\nu(x)$ [sometimes called Neumann's functions or Weber's functions and denoted by $N_\nu(x)$] and the Hankel functions $H_\nu^{(1)}(x)$ and $H_\nu^{(2)}(x)$ are also considered.

In products of the type $Z_\mu(\alpha x)\,Z_\nu(\beta x)$ let $\alpha^2 \neq \beta^2$.

When a formula is continued in the next line, then the last sign '+' or '-' is repeated in the beginning of the new line.

Defined functions:

Function	$\Phi(x)$, $\Phi_Y(x)$, $\Phi_H^{(1,2)}$	$\Psi(x)$	$\Theta(x)$	$\Omega(x)$	$\Lambda_0(x)$	$\Lambda_0^*(x)$
Page	4	4	121	121	78	82
Function	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_1^*(x)$	Θ_0, Ω_0	Θ_1, Ω_1	$\mathfrak{d}_\nu$	$\mathfrak{d}_\nu^*$
Page	82	84	163	165	56	62

E - This sign marks formulas, that were incorrect in previous editions. The pages with corrected errors are listed in the errata in the end.

References:

[1] M. Abramowitz, I. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, NY, 1970
[2] Y. L. Luke: Mathematical Functions and their Approximations, Academic Press, NY, 1975
[3] Y. L. Luke: Integrals of Bessel Functions, MacGraw-Hill, NY, 1962
[4] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев: Интегралы и ряды - Специальные функции, Наука, Москва, 1983
[5] E. Jahnke, F. Emde, F. Lösch: Tafeln höherer Funktionen, 6. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1960
[6] I. S. Gradstein, I. M. Ryshik: Summen-, Produkt- und Integraltafeln / Tables of Series, Products, and Integrals, Band 1 / Volume 1, Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt/M, 1981
[7] I. S. Gradstein, I. M. Ryshik: Summen-, Produkt- und Integraltafeln / Tables of Series, Products, and Integrals, Band 2 / Volume 2, Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt/M, 1981
[8] G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, University Press, 1922 / 1995
[9] P. Humbert: Bessel-integral functions, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2), 1933, 3:276-285

I wish to express my thanks to B. Eckstein, S. O. Zafra and Yao Sun for their remarks.

Abb. 1: Beispiel einer Integraltafel (1. Seite)